Leserbrief

Anmerkung zum Artikel „Anlagerisiko bei Aktien" von L. Pralle und K. Allerdissen

Die Autoren betrachten in ihrem Artikel unter anderem das α-Quantil $Q_\alpha(t)$ (mit $\alpha = 1\%$) der Verteilung des Aktienkurses am Ende des Anlagehorizonts t. Der Aktienkurs wird dabei auf Grund von historischen Daten des DAX stochastisch simuliert. Eines ihrer Ergebnisse ist, dass sich das α-Quantil ausgehend von t = 1 für kurze Anlagehorizonte zunächst verschlechtert, dann aber nach einer gewissen Laufzeit zunehmend verbessert: „... über die ersten Jahre vergrößert sich das Verlustpotential (...) ab einer gewissen Investitionsperiode ist der Jahrhundertschaden vollständig durch die Gewinne abgedeckt ...".

Mit einer vereinfachten Modellierung des Aktienkurses lassen sich weitere Eigenschaften im Zusammenhang mit dem Abschnitt „Verlustpotential bei langfristiger Aktienanlage" und Abbildung 2 des Artikels herausarbeiten.

Wir modellieren den Aktienkurs a_t, $t \geq 0$, als geometrische Brownsche Bewegung,

$$a_t = e^{\kappa t + \sigma W_t} \qquad (1)$$

mit Drift

$$\kappa = \mu - \frac{\sigma^2}{2},$$

Volatilität $\sigma > 0$, $W_t \sim N(0, t)$, d. h. W_t ist normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz t. Dann erhalten wir für das α-Quantil die Darstellung

$$Q_\alpha(t) = e^{\kappa t + \sigma\sqrt{t}\,\Phi^{-1}(\alpha)} \qquad (2)$$

wobei $\Phi^{-1}(\alpha)$ das α-Quantil der Standardnormalverteilung ist.

Mit den exemplarischen Werten $\mu = \ln 1.07$ und $\sigma = 0.17$ zeigt sich in der folgenden Abbildung ein Verlauf ähnlich wie in Abbildung 2 des Artikels. Aber wie typisch ist dieser Verlauf? (siehe Abbildung).

Vorausgesetzt, dass $\sigma^{-1}(\alpha) < 0$ und $\kappa > 0$, lässt sich die Gleichung

$$\frac{d}{dt} Q_\alpha(t) = Q_\alpha(t)\left(\kappa + \frac{\sigma\Phi^{-1}(\alpha)}{2\sqrt{t}}\right) = 0 \qquad (3)$$

lösen; man erhält ein relatives Minimum in

$$t = \left(\frac{\sigma\Phi^{-1}(\alpha)}{2\kappa}\right)^2, \qquad (4)$$

im Beispiel bei $t \approx 14$. Liegt jedoch ein Aktienindex oder -portefeuille mit großer Volatilität (so dass $\kappa \leq 0$) zugrunde, dann gibt es kein relatives Minimum und die Kurve zeigt ein anderes Bild: $Q_\alpha(t) \to 0$ mit $t \to \infty$.

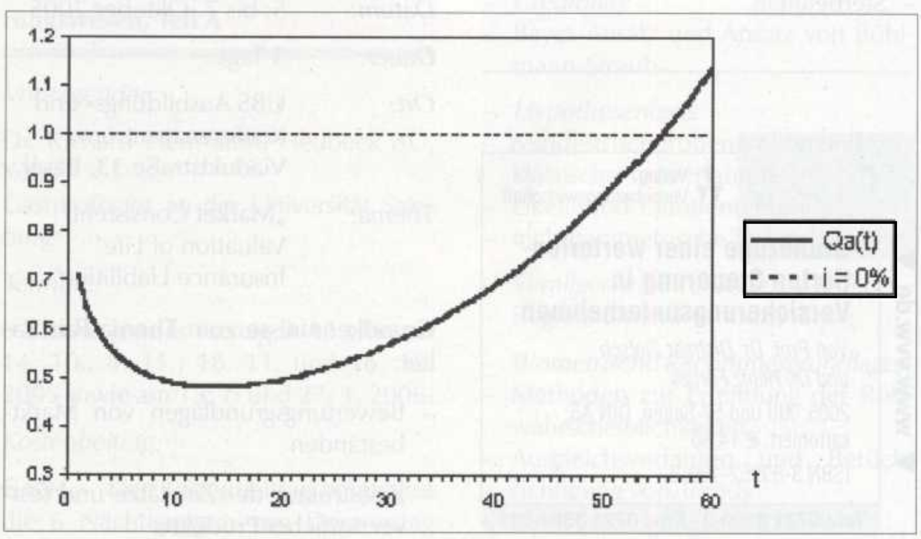
Gehen wir im Folgenden von $\Phi^{-1}(\alpha) < 0$ und $\kappa > 0$ aus. Ab welchem Zeitpunkt können wir sagen, dass auf dem gewählten Sicherheitsniveau α nicht mehr mit einem Verlust gerechnet werden muss? Nach Abbildung 2 des Artikels könnte dies etwa ab t = 20 bis t = 40 der Fall sein. Ab diesem Zeitfenster kann man von einer nominellen Werterhaltung ausgehen. In einem ökonomischen Umfeld sollte jedoch eine reale Werterhaltung anzustreben sein. Mit anderen Worten wäre das α-Quantil mit dem Verlauf einer risikolosen Anlage oder einer garantierten Mindestverzinsung mit dem Zinssatz i zu vergleichen. Dann interessieren wir uns für den Zeitpunkt t, ab dem gilt

$$Q_\alpha(t) \geq (1+i)^t. \qquad (5)$$

Diese Forderung ist nur erreichbar, wenn $\kappa > \ln(1 + i)$. Man erhält dann

$$t = \left(\frac{\sigma|\Phi^{-1}(\alpha)|}{\kappa - \ln(1+i)}\right)^2. \qquad (6)$$

Im Beispiel ist mit i = 2% der Zeitpunkt $t \approx 140$ deutlich weiter rechts als mit i = 0% der Zeitpunkt $t \approx 55$.



Literatur

Lars Pralle, Klaus Allerdissen (2004), Anlagerisiko bei Aktien, Der Aktuar, Heft 4, 10. Jahrgang, Seite 126-131.

Wagner & Kunz Aktuare AG, Steinenbachgässlein 27, CH-4051 Basel